

Cours 5:

Problème parabolique transitoire 1D et 2D
et éléments finis

Problème parabolique 1D et éléments finis

Considérons un barreau métallique de longueur L et dont les deux extrémités sont en contact avec des réservoirs de chaleur de température constante égale à $0^\circ C$. Supposons que ce barreau occupe l'intervalle $[0, L]$ de l'axe Ox et qu'au temps $t = 0$ sa température soit connue en tout point $x \in]0, L[$ et égale à $w(x)$, $x \in]0, L[$. Supposons en outre avoir placé sous le barreau une source de chaleur $f(x, t)$, donnée. La quantité $f(x, t)$ représente la puissance par unité de longueur fournie au point $x \in]0, L[$ et à l'instant $t > 0$.

La température $T = u(x, t)$ est alors donnée par l'équation de la chaleur:

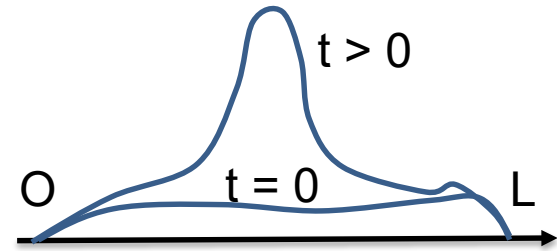
$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad \forall x \in]0, L[, \quad \forall t > 0. \quad (12.1)$$

A cette équation on adjoint les *conditions aux limites* :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad (12.2)$$

et la *condition initiale* :

$$u(x, 0) = w(x) \quad \forall x \in]0, L[. \quad (12.3)$$



Problème parabolique 1D et éléments finis

Nous prenons $\rho c_p = 1$ et $L = 1$ et cherchons la fonction $u(x,t)$ satisfaisant:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= f(x,t) & \forall x \in]0, 1[, \quad \forall t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) &= 0 & \forall t > 0, \\ u(x,0) &= w(x) & \forall x \in]0, 1[.\end{aligned}$$

Solution par la **méthode des différences finies**: soit N un entier positif,

Nous posons $h = 1/(N+1)$ et $x_i = ih$ pour $i = 0$ à $N+1$ et $u_i(t)$ une approximation de $u(x_i,t)$.

Le schéma en différences finies s'écrit:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u_i(t) + \frac{k}{h^2} \left(-u_{i-1}(t) + 2u_i(t) - u_{i+1}(t) \right) &= f(x_i, t) \\ & i = 1, \dots, N, \quad \forall t > 0 \\ u_0(t) = u_{N+1}(t) &= 0 & \forall t > 0, \\ u_i(0) &= w(x_i) & i = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Les fonctions $u_i(t)$, $i=1$ à N , sont les inconnues du pb.

Problème parabolique 1D

Nous obtenons une semi-discrétisation en espace du pb de la chaleur.

Si A est la $N \times N$ matrice tridiagonale définie par

$$A = \frac{k}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

si $\vec{u}(t)$ est le N -vecteur de composantes $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$, si $\vec{f}(t)$ est le N -vecteur de composantes $f(x_1, t), f(x_2, t), \dots, f(x_N, t)$ et si \vec{w} est le N -vecteur de composantes $w(x_1), w(x_2), \dots, w(x_N)$,

Le schéma différentiel s'écrit:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}}(t) &= -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) & \forall t > 0, \\ \vec{u}(0) &= \vec{w}, \end{aligned}$$

Problème parabolique 1D et éléments finis

Schéma d'Euler progressif:
$$\begin{aligned}\dot{\vec{u}}(t) &= -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) & \forall t > 0, \\ \vec{u}(0) &= \vec{w},\end{aligned}$$

Soit $\tau > 0$ un pas de temps donné, soit $t_n = n\tau$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$, et soit \vec{u}^n une approximation de $\vec{u}(t)$ au temps $t = t_n$; nous noterons $\vec{u}^n \simeq \vec{u}(t_n)$.
Considérons le schéma :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^n + \vec{f}(t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.13)$$

$$\vec{u}^0 = \vec{w}. \quad (12.14)$$

Clairement, nous avons

$$\vec{u}^{n+1} = (I - \tau A)\vec{u}^n + \tau \vec{f}(t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (12.15)$$

où I est la $N \times N$ matrice identité; le vecteur \vec{u}^{n+1} peut être calculé explicitement à partir du vecteur \vec{u}^n . Ainsi, à partir de $\vec{u}^0 = \vec{w}$, on peut calculer de proche en proche $\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3, \dots$, en utilisant (12.15); la j -ème composante u_j^n de \vec{u}^n est une approximation de $u(x_j, t_n)$, $j = 1, \dots, N$, $n \geq 0$. Le schéma numérique (12.13) (12.14) est *une discrétisation* (complète) du problème (12.4) (12.5) (12.6) par la méthode des différences finies.

Problème parabolique 1D et éléments finis

Schéma d'Euler progressif:

Comme dans la section 9.3, une *condition de stabilité* limite le choix du pas temporel τ . Cette limitation est fonction du pas spatial et est exprimée par la condition :

$$\tau \leq \frac{h^2}{2k}. \quad (12.16)$$

longueur de diffusion pdt τ : $\sqrt{2D\tau}$ avec $D = \frac{k}{\rho C_p} = k$ ici car $\rho C_p = 1$

condition de stabilité: $\sqrt{2k\tau} \leq h$ soit $\tau \leq \frac{h^2}{2k}$, i.e la longueur de diffusion

de la chaleur pendant τ doit rester inférieure au pas d'espace h .

Problème parabolique 1D et éléments finis

Schéma d'Euler rétrograde:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{u}}(t) &= -A\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \quad \forall t > 0, \\ \vec{u}(0) &= \vec{w},\end{aligned}$$

La dérivée temporelle est prise en t_{n+1} :

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^{n+1} + \vec{f}(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ou, de façon équivalente

$$(I + \tau A)\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^n + \tau \vec{f}(t_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La matrice $I + \tau A$ est tridiagonale et définie positive car A l'est est $\tau > 0$: on la décomposera par la méthode de Cholesky en LL^t pour l'inverser.

Ce schéma est implicite (il faut inverser $I + \tau A$) mais inconditionnellement stable. La résolution en temps dans Abaqus se fait en schéma implicite.

NB: on peut aussi utiliser des schémas mixtes ou de Runge-Kutta.

Problème parabolique 1D et éléments finis

Éléments finis 1D: formulation faible

On travaille sur $[0,1]$ puisque $L = 1$.

On multiplie par une fonction $v(x)$ à dérivée continue par morceaux sur $[0,1]$ et vérifiant $v(0)=v(1)=0$ (e.v V) puis on intègre de 0 à 1:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x)dx - \int_0^1 k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)v(x)dx = \int_0^1 f(x, t)v(x)dx.$$

On utilise une intégration par parties du second terme pour obtenir **la formulation faible** du pb:

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)v(x)dx + \int_0^1 k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)v'(x)dx = \int_0^1 f(x, t)v(x)dx$$

On cherche donc $u(x,t)$ telle que pour tout v de V (de dimension infinie), l'équation ci-dessus soit vérifiée.

Problème parabolique 1D et éléments finis

Éléments finis: approximation de Galerkin

On considère le sous espace vectoriel V_h de V engendré par les N fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ pour obtenir l'approximation de Galerkin: trouver $u_h(x,t)$ de V_h (de dimension finie) telle que pour tout v_h de V_h :

$$\int_0^1 \frac{\partial u_h}{\partial t}(x,t) v_h(x) dx + \int_0^1 k \frac{\partial u_h}{\partial x}(x,t) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x,t) v_h(x) dx.$$

avec la condition initiale $u_h(x,0) = w_h(x)$ où $w_h(x)$ est l'approximation de $w(x)$ dans V_h .

Nous développons $u_h(x,t)$ dans la base V_h : $u_h(x,t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \varphi_i(x)$

L'équation ci-dessus doit être vérifiée pour tout $v_h(x)$ de V_h i.e. pour tous les φ_j :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t) \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \sum_{i=1}^N u_i(t) \int_0^1 k \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx \\ = \int_0^1 f(x,t) \varphi_j(x) dx \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

que l'on réécrit sous la forme matricielle: $M \dot{\vec{u}}(t) + A \vec{u}(t) = \vec{f}(t) \quad \forall t > 0.$

Problème parabolique 1D et éléments finis

Éléments finis: matrices de rigidité et de masse

Si A est la $N \times N$ matrice de coefficients

$$A_{ji} = \int_0^1 k \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx \quad (12.30)$$

(A est appelée *matrice de rigidité*), si M est la $N \times N$ matrice de coefficients

$$M_{ji} = \int_0^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad (12.31)$$

(M est appelée *matrice de masse*), si $\vec{u}(t)$ est le N -vecteur de composantes $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$ et si $\vec{f}(t)$ est le N -vecteur dont la j -ème composante est

$$f_j(t) = \int_0^1 f(x, t) \varphi_j(x) dx, \quad (12.32)$$

alors les relations (12.29) sont équivalentes à chercher $\vec{u}(t)$ tel que

$$M \dot{\vec{u}}(t) + A \vec{u}(t) = \vec{f}(t) \quad \forall t > 0. \quad (12.33)$$

Problème parabolique 1D et éléments finis

Éléments finis: traitement de la C.I. (condition initiale):

la solution initiale $u(x,0)=w(x)$ est projetée sur la base de V_h et devient $w_h(x)$:

$$w_h(x) = \sum_{i=1}^N w_i \varphi_i(x).$$

Si \vec{w} est le N -vecteur de composantes w_1, \dots, w_N , alors la condition initiale du système différentiel (12.33) est définie par :

$$\vec{u}(0) = \vec{w}. \quad (12.34)$$

Nous avons donc obtenu une *semi-discrétisation* spatiale du problème (12.4) (12.5) (12.6). Il est facile de vérifier que les matrices M et A sont des $N \times N$ matrices symétriques définies positives. Le système différentiel (12.33) est équivalent à

$$\dot{\vec{u}}(t) = -M^{-1}A\vec{u}(t) + M^{-1}\vec{f}(t) \quad \forall t > 0, \quad (12.35)$$

Problème parabolique 1D et éléments finis

Discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis

- on définit concrètement une base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ de type éléments finis comme nous l'avons fait dans la section 10.4 et on construit les matrices M , A et le vecteur \vec{f} ;
- en supposant la condition initiale w continue sur $[0, 1]$, on construit w_h en interpolant w par des polynômes de degré 1 sur chaque élément géométrique (sect. 1.6) ;
- on détermine une approximation \vec{u}^n de $\vec{u}(t_n)$ en utilisant un schéma d'Euler progressif ou rétrograde comme dans (12.13) ou (12.17).

La résolution temporelle peut être réalisée par un schéma d'Euler progressif:

$$M \frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} = -A\vec{u}^n + \vec{f}(t_n)$$

ou, de façon équivalente

$$M\vec{u}^{n+1} = (M - \tau A)\vec{u}^n + \tau\vec{f}(t_n),$$

où τ est le pas de temps et $t_n = n\tau$.

M n'étant pas diagonale, il faut l'inverser: le schéma progressif n'est pas explicite.

Problème parabolique 1D et éléments finis

Mass lumping sur la matrice M

Pour le rendre explicite, il faut calculer concrètement la matrice de masse M en utilisant la formule de quadrature des trapèzes. Ainsi, nous obtenons en utilisant la formule (10.24) avec $c = 1$:

$$M_{ji} = \int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \simeq L_h(\varphi_i\varphi_j) = \begin{cases} h & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ce procédé consiste à approcher la matrice de masse M par une matrice diagonale (on parle ici de *mass lumping*) et donc à rendre explicite le schéma d'Euler progressif.

Mass lumping sur la matrice M : sommer tous les termes d'une ligne i sur M_{ii} et rendre ainsi M diagonale (acceptable si les $M_{ij, j \neq i}$ sont très petits devant les M_{ii})

$$M_{ii} \leftarrow \sum_{j=1}^N M_{ij}$$

Exo 5a : calculer la matrice pour des fonctions chapeaux linéaires 1D et appliquer le mass lumping sur cette matrice.

Problème parabolique 1D et éléments finis

La résolution temporelle par un schéma mixte:

$$M\dot{\vec{u}}(t) + A\vec{u}(t) = \vec{f}(t) \quad \forall t > 0.$$

Eléments finis: schéma mixte de Crank-Nicholson, moyenne des schémas d'Euler progressif et rétrograde (d'ordre 2 en $\Delta t = \tau$)

$$M\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^n}{\tau} + A\frac{\vec{u}^{n+1} + \vec{u}^n}{2} = \frac{\vec{f}(t_{n+1}) + \vec{f}(t_n)}{2},$$

ou, de façon équivalente

$$(M + \frac{\tau}{2}A)\vec{u}^{n+1} = (M - \frac{\tau}{2}A)\vec{u}^n + \frac{\tau}{2}(\vec{f}(t_{n+1}) + \vec{f}(t_n)). \quad (12.37)$$

Le schéma (12.37) est appelé *schéma de Crank-Nicholson* ; c'est un schéma numérique d'ordre 2, implicite, inconditionnellement stable (en norme quadratique !).

Problème parabolique 2D et éléments finis

Soit Ω un domaine polygonal dans le plan Ox_1x_2 , de frontière $\partial\Omega$ et soit $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Si $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sont quatre fonctions de $(x, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+$ données, si $f : (x, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}$ et $w : x \in \bar{\Omega} \rightarrow w(x) \in \mathbb{R}$ sont deux autres fonctions données, nous posons le problème de trouver une fonction $u : (x, t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x, t) \right) = f(x, t)$$
$$\forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \quad (12.38)$$

$$u(x, t) = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \quad (12.39)$$

$$u(x, 0) = w(x), \quad \forall x \in \Omega. \quad (12.40)$$

La relation (12.39) est appelée *condition aux limites* alors que la relation (12.40) est appelée *condition initiale*.

Problème parabolique 2D et éléments finis

Cas de la chaleur avec une conductivité thermique anisotrope:

$$A = \begin{pmatrix} k_{11}(x,t) & k_{12}(x,t) \\ k_{21}(x,t) & k_{22}(x,t) \end{pmatrix} \text{ avec } J = -A\nabla T = \text{flux de chaleur en W/m}^2$$

$$\text{équation de la chaleur: } \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(-A\nabla T) = f(x,t)$$

Cas où $A = I_2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) &= f(x,t) & \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x,t) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x,0) &= w(x) & \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

Problème parabolique 2D et éléments finis

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) &= f(x, t) & \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x, t) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) &= w(x) & \forall x \in \Omega,\end{aligned}$$

Semi - discrétisation spatiale du pb parabolique en 2D qui mènera à un système différentiel en temps. On commence par définir $u_h(x, t)$ approximation de $u(x, t)$ sur la base des φ_i :

$$u_h(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \varphi_i(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0,$$

Puis on intègre par partie en utilisant la relation: $\operatorname{div}(v \overrightarrow{\operatorname{grad}} u) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} v \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} u + v \Delta u$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t) \iint_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \sum_{i=1}^N u_i(t) \iint_{\Omega} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi_i(x) \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi_j(x) dx \\ = \iint_{\Omega} f(x, t) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}$$

Problème parabolique 2D et éléments finis

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \quad (12.41)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \quad (12.42)$$

$$u(x, 0) = w(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (12.43)$$

On définit alors les matrices de masse M et de rigidité A et le vecteur f :

$$M_{ji} = \iint_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx \quad A_{ji} = \iint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i(x) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j(x) dx, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

$$f_j(t) = \iint_{\Omega} f(x, t) \varphi_j(x) dx.$$

Pour obtenir le système différentiel: $M \dot{\vec{u}}(t) + A \vec{u}(t) = \vec{f}(t) \quad \forall t > 0,$

que l'on résoudra par des schémas temporels d'Euler (progressif ou rétrograde) ou de Cranck-Nicholson (schéma mixte).

Problème parabolique 2D et éléments finis

Exemple: pb parabolique suivant sur le carré unité Ω de frontière $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) &= f(x, t) & \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x, t) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) &= w(x) & \forall x \in \Omega,\end{aligned}$$

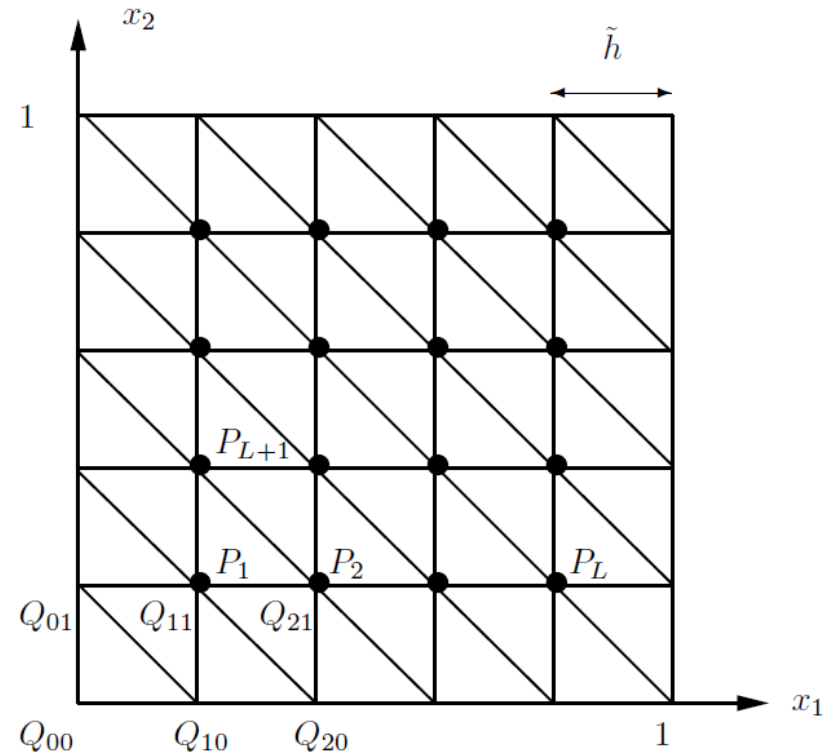


Fig. 11.4 Le carré unité et sa triangulation pour $L = 4$.

Problème parabolique 2D et éléments finis

Triangulation τ_h et fonctions de base φ_i (fct linéaires par morceaux):
cf. cours 4 (pb elliptique 2D)

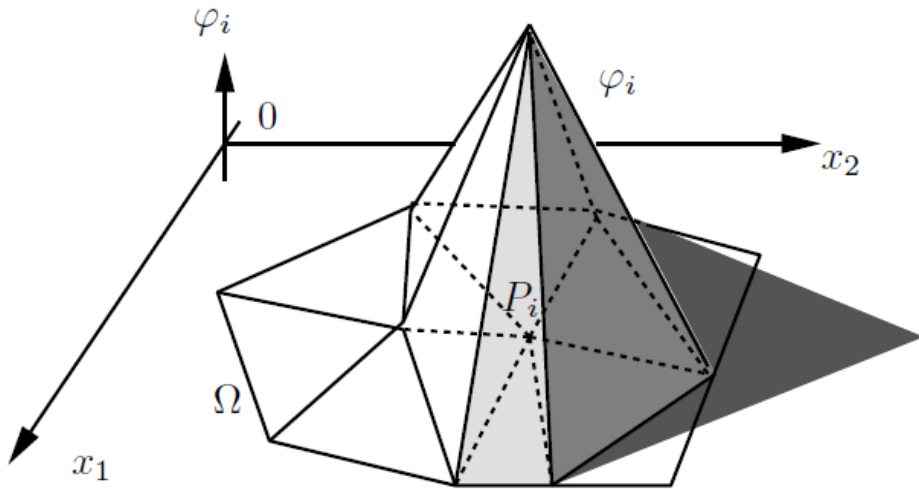


Fig. 11.3 La fonction de base φ_i .

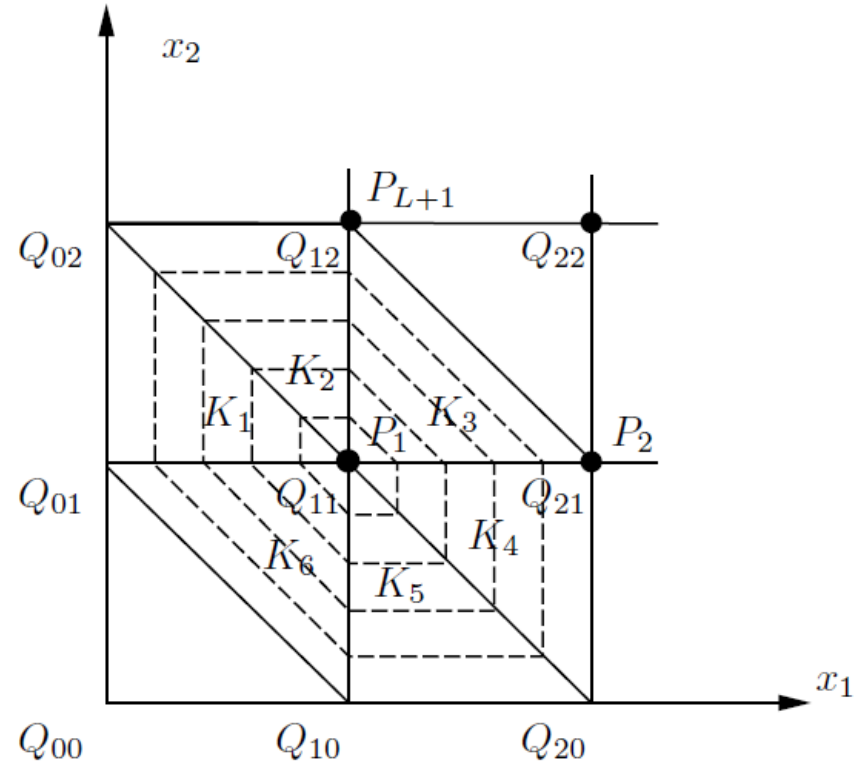


Fig. 11.5 Support et isovaleurs de la fonction de base φ_1 .

Problème parabolique 2D et éléments finis

La matrice de rigidité A , $A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dV$, est nona-diagonale pour $L = 4$: cf. cours 4

$$A = \begin{bmatrix} B & C & & & \\ C & B & C & & \\ & C & B & C & \\ & & C & B & C \\ & & & C & B \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}$$

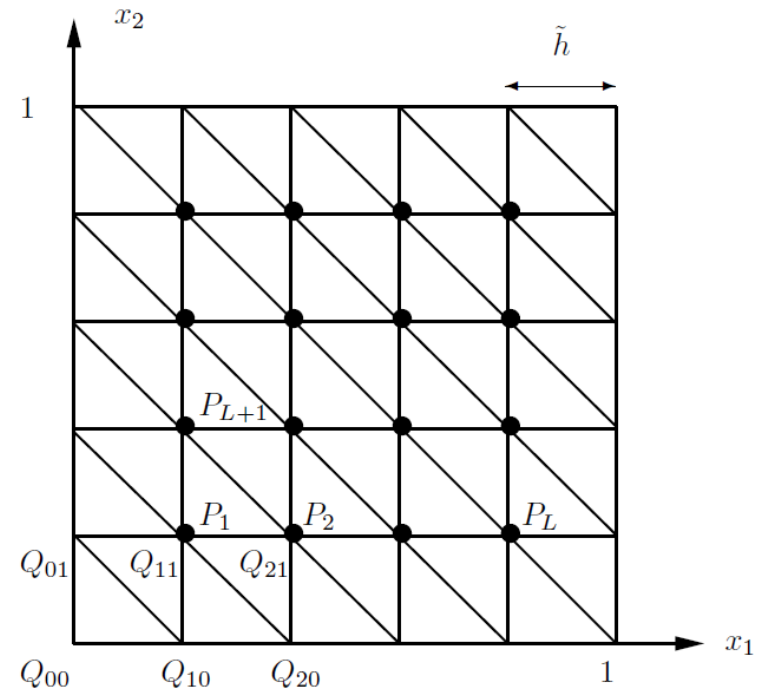


Fig. 11.4 Le carré unité et sa triangulation pour $L = 4$.

Problème parabolique 2D et éléments finis

Matrice de masse M , $M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dV$ est nona-diagonale pour $L = 4$.

Sa demi-largeur de bande est 5.

$$M = \frac{\tilde{h}^2}{12} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{C} & & & \\ \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} & & \\ & \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} & \\ & & \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} \\ & & & \tilde{C}^T & \tilde{B} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & & \\ 1 & 6 & 1 & & \\ & 1 & 6 & 1 & \\ & & 1 & 6 & 1 \\ & & & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le mass lumping sur M donne: $M \approx h^2 I$

Exo 5b : calculer la matrice de masse M pour $L = 4$ ($\tilde{h} = h$)
et appliquer le mass lumping sur cette matrice.

Mercredi 29 Octobre: cours 6
Problèmes de convection-diffusion et éléments finis 1D

Mercredi 5 Novembre : introduction à Abaqus

Mercredi 12 Novembre: propé1 de 15h15 à 17h (aucun document), présence obligatoire (examen)

NB: 1/3 temps supplémentaire pour certains étudiants